PRELEGEREA 1
INTRODUCERE LA METODA ELEMENTELOR FINITE

1.1 Desprea studiul realității fizice

1.1.1 Consideraţii generale

Nu este lipsită de temei afirmaţia că *realitatea fenomenologică sau comportamentală a unui spațiu/sistem material/fizic nu poate fi cunoscută în toată coplexitatea ei*, dar că *poate fi cunoscută în simplitatea ce o caracterizează esențial la un moment dat*, prin *aproximare*; deci, am stabilit că în spațiul/sistemul material/fizic se manifestă *fenomene fizice*.

Problematica fenomenelor fizice cunoaște abordări:

- *teoretice*, care stabilesc principii şi legi funcţionale ce fundamentează modul de cunoaştere a realităţii fizice, prin *identificarea unor moduri de comportare ideală* (bazate pe legi precum cea a lui Hooke, a lui Navier-Stokes, a lui Fourier etc.); consecinţa: crearea de *teorii matematice* care operează cu *modele matematice*, aşa cum se întâmplă în cazul:
  - fenomenului deformării corpurilor solide,
  - fenomenului deformării/curgerii corpurilor fluide,
  - fenomenului transferului căldurii etc.;
- *inginereşti*, care adaptează cunoştinţele teoretice la *cerinţele tehnice* impuse *sistemelor tehnice*; consecința: crearea de *metode inginerești* care operează cu *modele inginereşti*.

Problematica comportarii sistemelor tehnice stabilește modelele inginereşti cu care operează:

- *după nivelul de introspecţie al sistemului analizat*:
  - *modele care evidenţiază discontinuitatea sistemului* (la nivel microscopic, atomic şi molecular: pentru studiul corpurilor cristaline, proiectarea şi fabricarea materialelor etc.);
  - *modele care evidenţiază continuitatea sistemului* (la nivel macroscopic: pentru studiul deformării solidelor, curgerii fluidelor, transferului căldurii etc.);
  - *modele care evidenţiază interactivitatea sistemului* (la nivelul interfetelor: pentru studiul interacţiunii fluid-solid etc.);
- *după modul de considerare a timpului în analiză*:
  - *modele la care timpul nu este evidențiat*, pentru analizele statice/staţionare;
  - *modele la care timpul este evidențiat implicit*, pentru analizele ale valorilor şi vectorilor proprii;
  - *modele la care timpul este evidențiat explicit*, pentru analizele dinamice/nestaţionare;
- *după caracterul constitutiv*:
  - *modele fizice*, cazul analizelor experimentale;
  - *modele virtuale*, cazul analizelor matematice:
    - *continue*, pentru calcule analitice:
      - diferenţiale;
      - integrale;
    - *discrete*, pentru calcule numerice:
      - diferenţiale: Metoda Diferenţelor Finite (MDF);
      - integrale: Metoda Elementelor Finite (MEF), Metoda Elementelor de Contur (MEC), Metoda Volumelor Finite (MVF);
      - alte metode: Metoda Spectrală, Metoda Reţelei Libere etc..

Scopul demersului de față este inițierea în utilizarea *Metodei Elementului Finit* (*MEF*) pentru analiza fenomenelor fizice în general şi pentru analiza deformării corpurilor solide/sistemelor structurale cu comportare liniar-elastică în particular.

Ce este MEF?: este o tehnică numerică de studiu a fenomenelor fizice şi dezvoltată, cu precădere, pentru studiul manifestării acestora în spaţii bidimensionale (2D) şi tridimensionale (3D); este des utilizată în soluţionarea aplicaţiilor inginereşti (cazul deformării solidelor, curgerii fluidelor, transferului căldurii etc.).

În ce constă analiza cu MEF?: în înlocuirea domeniului real, în care se petrece un fenomen dificil de studiat, cu un alt domeniu (numit *model discret*), în care studiul fenomenului este mai uşor de efectuat şi rezultatele mai uşor de obţinut chiar dacă sunt aproximative pentru domeniul iniţial, dar acceptabile dintr-un punct de vedere practic; înlocuirea domeniului de studiat/analizat urmează unui proces (numit *modelare*) de împărţire (sau *discretizare*) în subdomenii (numite *elemente finite*), conectate la *extremităţile lor* (numite şi *noduri exterioare ale elementului finit*), în *nodurile modelului discret cu elemente finite*, unde se definesc *parametrii caracteristici* (*principali* şi *secundari*).

Cum se aplică MEF?: pornind de la stabilirea, în mod specific, a ecuaţiei matriceale de echilibru pentru fiecare element finit (prin una dintre *formulările*: directă, cu reziduuri ponderate, variaţională, energetică etc.) şi continuând cu un proces de refacere a modelului discret (numit *asamblare*) pentru obţinerea ecuaţiei de echilibru a acestuia, după care, prin introducerea condiţiilor la limită/pe contur şi rezolvare se obţin valorile parametrilor principali în nodurile modelului discret.

1.1.2 Aproximarea prin discretizare a realităţii fizice

Încă din antichitate *aproximarea* a fost utilizată ca formă de cunoaştere a realităţii înconjurătoare, *discretizarea* fiind un procedeu de aplicare a ei.

Exodus şi Arhimede au pus la punct o metodă pentru evaluarea ariilor figurilor plane (complexe) având conturul curb, prin împărţirea în suprafeţe date de figuri simple (simplexe, precum triunghiul, pentru care se cunoaşte modul de calcul al ariei) şi a căror arii însumate aproximează aria suprafeţei figurii complexe; cu cât numărul suprafeţelor figurilor simple este mai mare cu atât suma ariilor acestora va fi mai apropiată de aria suprafeţei figurii complexe. Această metodă este denumită şi *metoda exhaustivă a lui Arhimede*.

Să aplicăm această metodă la determinarea ariei suprafeţei unui cerc prin împărţirea lui într-un număr de suprafeţe triunghiulare egale pornind din centrul acestuia (figura 1.1). Această împărţire sau discretizare se poate realiza atât prin înscrierea triunghiurilor în cerc (figura 1.1a) cât şi prin circumscrierea acestora cercului (figura 1.1b).

Crescând numărul triunghiurilor şi reprezentând, într-un sistem de referinţă, punctele definite de numărul triunghiurilor pentru discretizare şi suma ariilor suprafeţelor acestora se poate observa tendinţa punctelor de a se apropia de dreapta stabilită la nivelul valorii ariei suprafeţei cercului, $\pi \cdot r^2$ (figura 1.1c). În felul acesta ilustrăm conceptual de *convergenţă a soluţiei aproximative către soluţia exactă*, prin creşterea numărului triunghiurilor; se poate observa că aproximarea se poate realiza atât *prin adaos* cât şi *prin lipsă*.

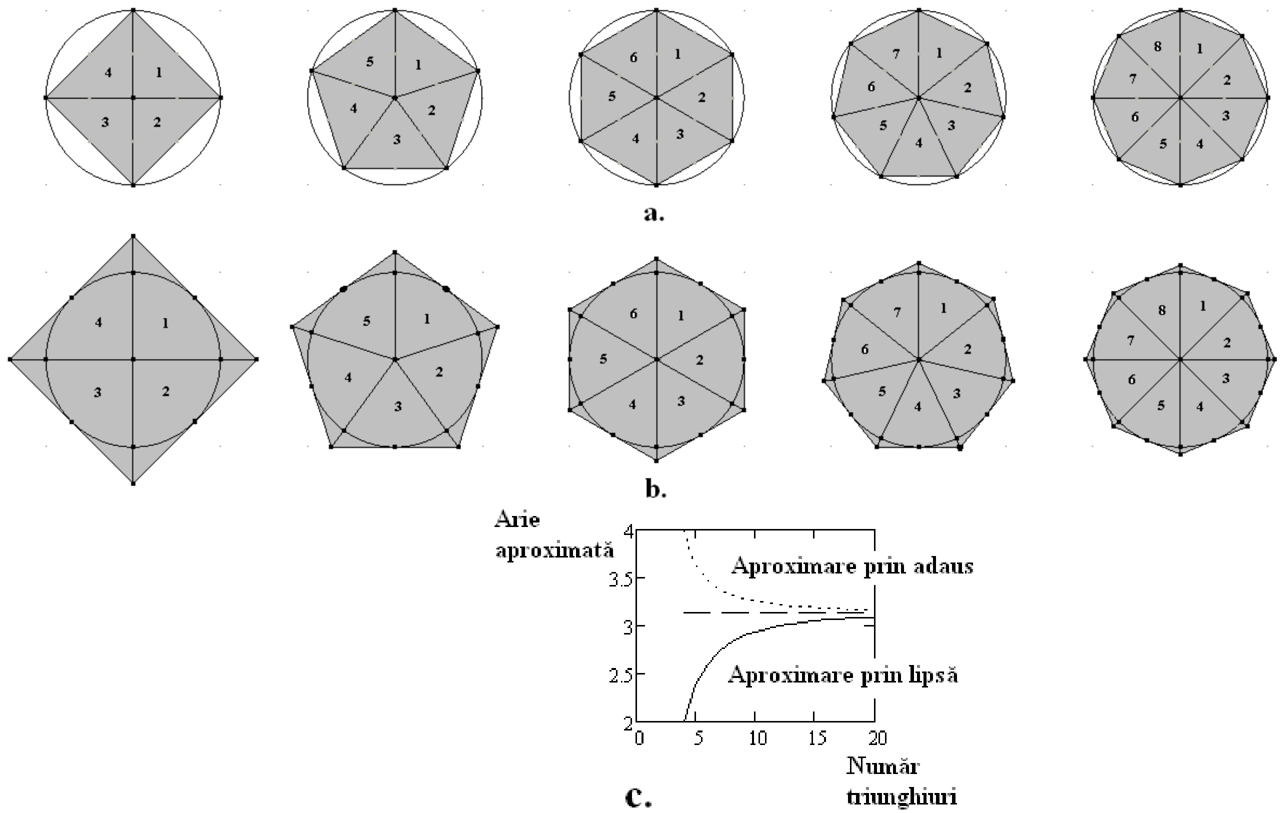

Figura 1.1 Aproximarea ariei cercului prin discretizare

1.2 Analiza cu elemente finite a sistemelor tehnice

1.2.1 Metoda elementelor finite în cazul structurilor deformabile

MEF, porneşte de la ideea că pentru analiza deformării unei structuri continue (cu geometrie oarecare şi condiţii la limită complexe) valorile exacte ale parametrilor (deplasări, forţe) nu pot fi calculate sau dacă pot fi efortul de calcul ar fi nejustificat.

În cazul în care este posibilă o soluţionare aproximativă, mai uşor de efectuat, şi gradul de aproximare este, inginereşte, rezonabil această soluţie este acceptată ca soluţie pentru structura iniţială. Altfel spus, analiza cu MEF a unei structuri presupune înlocuirea acesteia cu alta pentru care calculul parametrilor este mai uşor de efectuat, valorile parametrilor fiind aproximative pentru structura de analizat, dar acceptabile din punctul de vedere ingineresc.

MEF, pentru cazul structurilor, poate fi privită ca extinderea metodei staticii matriceale clasice (dezvoltată pentru studiul ansamblurilor cu elemente structurale unidimensionale, structurilor din bare) la structuri continue bidimensionale şi tridimensionale.

MEF implică un proces pentru discretizarea (naturală şi/sau artificială) a structurilor analizate şi un mod specific de stabilire a ecuaţiei matriceale de echilibru (obişnuit utilizând o *formulare directă*) pentru fiecare element finit (sub forma unui sistem de ecuaţii algebrice).

Elementul finit al modelului discret trebuie să fie compatibil cu dezvoltarea în spaţiu a structurii şi modelul matematic care îl defineşte să simuleze, cât mai bine, comportarea structurii în zona pe care o acoperă; astfel, în cazul în care structura are o dezvoltare unidirecţională elementele finite corespunzătoare să fie unidimensionale (1D), drepte sau curbe, în cazul unei dezvoltări plane elementele finite corespunzătoare să fie bidimensionale (2D), cu laturi drepte sau curbe, şi în cazul unei dezvoltări spaţiale elementele finite corespunzătoare să fie tridimensionale (3D), cu feţe plane sau curbe (figura 1.2).

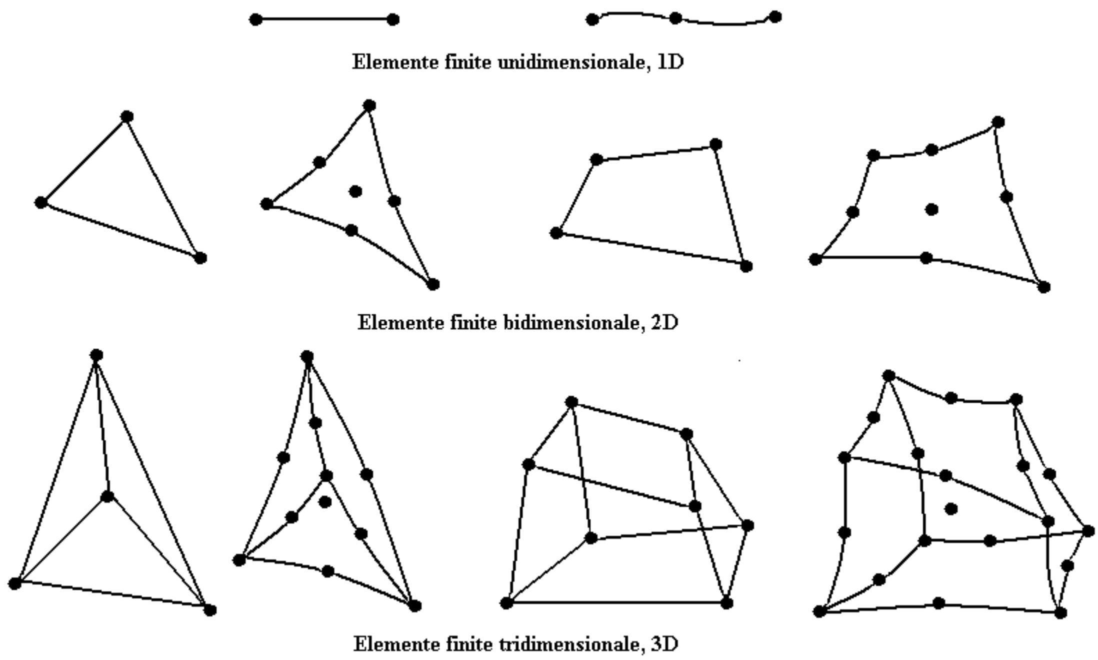

Figura 1.2 Tipuri generice de elemente finite

În afară de extremităţi (numite şi *noduri exterioare* ale elementului finit), elementele finite pot prezenta noduri şi între acestea (vezi cazul elementelor finite cu laturi curbe) sau la interiorul elementelor finite (vezi cazul elementelor finite cu laturi curbe sau feţe curbe) şi care nu sunt utilizate la cuplarea elementelor finite, numite şi *noduri necompatibile* (se utilizează pentru îmbunătățirea simulării realității).

Componentele matricelor şi vectorilor ce intervin sunt date, cel mai adesea, sub formă de integrală simplă pentru elementele finite cu o dimensiune (1D), dublă pentru elementele finite cu două dimensiuni (2D) şi triplă pentru elementele finite cu trei dimensiuni (3D). Rezolvarea integralelor poate fi exactă, dar, cel mai adesea aproximativă şi atunci se apelează la integrări numerice (după o direcţie în cazul elementelor finite 1D, după două direcţii în cazul elementelor finite 2D şi după trei direcţii în cazul elementelor finite 3D).

Principial, analiza unei structuri cu MEF urmează aceleaşi etape de calcul cunoscute din metoda staticii matriceale clasice.

1.2.2 Modelele virtuale cu elemente finite în cazul structurilor deformabile

Discretizarea cu elemente finite, la modul cel mai general, fiind artificială, depinde, calitativ şi cantitativ, de experienţa şi abilitatea analistului de a o efectua.

La alcătuirea modelului virtual discret cu elemente finite trebuie respectată o serie de reguli principiale (valabile şi în cazul altor tehnici numerice de analiză a structurilor) care se referă la:

- *asigure preciziei urmărite a rezultatelor*; soluţia aproximativă este mai apropiată de cea exactă cu cât numărul elementelor finite utilizat la discretizare este mai mare (cel puţin în principiu), dar şi timpul de calcul necesar atingerii acesteia, deci şi costul, este mai mare;
- *surprinderea particularităţilor de formă, de comportare, de distribuire a materialului, de rezemare şi încărcare* pe care structura le prezintă;
- *numerotarea optimă a nodurilor* (iar în cazul metodei frontale de asamblare, *numerotarea elementelor finite*), ce poate îmbunătăţi procesul de memorare şi de rezolvare pe calculator a sistemului de ecuaţii de echilibru static şi/sau dinamic al structurii analizate;
- *realizarea modelului virtual în mai multe variante de discretizarea*, ce trebuie să confirme convergenţa rezultatelor.

În ce privește creșterea calității analizelor cu elemente finite prin creșterea numărului de elemente finite utilizate la discretizarea modelului virtual, trebuie avute în vedere situații care se referă la:

- *variaţia accentuată a geometriei structurii, prezenţa mai multor materiale în alcătuirea structurii şi/sau prezenţa unor încărcări/rezemări concentrate sau distribuite discontinuu,* ce necesită poziţionarea nodurilor, respectiv a frontierei elementului finit;

- *prezenţa golurilor şi/sau incluziunilor de material, prezenţa încărcărilor/rezemărilor concentrate şi/sau variaţia bruscă a geometriei*, ce necesită utilizarea unei discretizări graduale pentru că, în aceste zone, variaţia funcţiei parametru este pronunţată;

- *prezenţa curburilor* (linii curbe şi/sau suprafeţe curbe) *pe conturul structurilor*, ce necesită, în procesul discretizării, utilizarea elementelor finite care să urmărească în mod fidel conturul acesteia: fie un număr mare de elemente cu contururi drepte (laturi sau feţe), fie un număr mic de elemente cu contururi curbe (laturi sau feţe); este de preferat ca raportul lungimilor oricăror două laturi ale aceluiaşi element finit să tindă la 1, în caz contrar, să nu depăşească raportul 1/5.

Finalul metodei elementului finit constă în rezolvarea unui sistem de ecuaţii algebrice (ecuaţia de echilibru matriceal a modelului virtual discret cu elemente finite) pentru a cărui memorare este necesar un efort din partea calculatorului, efort ce depinde nu numai de numărul parametrilor nodali ai modelului discret, ci şi de modul de numerotare a nodurilor acestuia (mai precis, de numerotare a parametrilor asociaţi nodului).

Mărimea spaţiului alocat în memoria calculatorului pentru stocarea elementelor matricei sistemului de ecuaţii (numită, la modul general, *matrice caracteristică a structurii*), mai întâi la nivelul elementului finit şi, ca o consecinţă, la nivelul modelului virtual discret, este dată de aşa numita *lăţime de bandă*, care trebuie să fie cât mai mică.

Lăţimea de bandă este dată de numărul maxim de coloane care conţin măcar o componentă diferită de zero, situată la stânga şi la dreapta diagonalei principale a matricei caracteristice (componentele din afara lăţimii de bandă fiind egale cu zero). Astfel, pentru fiecare element finit se va urmări realizarea unei diferenţe minime între oricare doi indecşi nodali corespunzând extremităţilor sale (mai corect spus între oricare două grade de libertate ale elementului finit).

Matricea caracteristică capătă semnificaţii fizice (de *rigiditate* sau *permeabilitate* şi *flexibilitate* sau *rezistenţă*) funcţie de fenomenul studiat (deformarea solidului sau transferul căldurii şi curgerea fluidelor etc.) şi de *parametrii principali* ai problemei (necunoscutele problemei).

În deformarea solidului, dacă rezolvarea problemei se face prin metoda deplasărilor parametrii principali (necunoscutele problemei) sunt deplasările nodurilor modelului virtual discret şi matricea caracteristică este de *rigiditate* (atât la nivelul elementului cât şi la nivelul structurii), dar dacă rezolvarea problemei se face prin metoda forţelor parametrii principali (necunoscutele problemei) sunt forţele din nodurile modelului structural şi matricea caracteristică este de *flexibilitate* (atât la nivelul elementului cât şi la nivelul structurii).

Din considerente de implementare pe calculator a programelor bazate pe MEF, unele forme de exprimare ale acesteia au fost preferate altora. Astfel, în deformarea solidului, programele bazate pe MEF, exprimarea în deplasări, cunosc o dezvoltare amplă pentru că sistemul static de bază, cu care începe procedura de calcul, este unic şi deci nu pune probleme de dubiu calculatorului sau evită efortul analistului de depăşire a dubiului şi de depăşire a riscului introducerii de erori.